

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

concours d'élève titulaire de l'ENSAI
concours externe d'attaché de l'INSEE

MAI 2002

Option A. – **MATHÉMATIQUES**

première composition de mathématiques

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices est interdit

Le sujet comprend 3 pages (y compris celle-ci).

Tournez la page S.V.P.

Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Si $a, b \in \mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme $a \circ b$ sera noté ab et l'on pose $[a, b] = ab - ba$.

Pour $a \in \mathcal{L}(E)$ on note θ_a l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par

$$\theta_a(b) = [a, b] = ab - ba.$$

On rappelle le théorème de décomposition en noyaux :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ses valeurs propres distinctes et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ leur multiplicité respective ; alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(u - \lambda_i Id)^{\alpha_i}.$$

L'objet du problème est d'étudier dans quelques cas particuliers des propriétés du "crochet" [,].

I–EXEMPLE.

1° On suppose dans cette question que $E = \mathbb{C}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré au plus n, à coefficients dans $\mathbb{C}$, et l'on pose pour $P \in E$

$$e(P) = P', \quad f(P) = -nXP + X^2P', \quad h(P) = -nP + 2XP'.$$

a) Calculer $[e, h]$; $[f, h]$; $[e, f]$.

b) Soit $F \neq \{0\}$, un sous-espace de E stable par e, f, h, et $P \neq 0$ un élément de F. En examinant les degrés des images successives de P par e et par f, prouver que $F = E$.

E désigne maintenant un $\mathbb{C}$-espace vectoriel quelconque de dimension finie. On considère 3 éléments de $\mathcal{L}(E)$ notés e, f, h et vérifiant :

$$[e, h] = 2e, \quad [f, h] = -2f, \quad [e, f] = h.$$

On note $\mathcal{L}_3$ le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent.

2° Prouver que $\dim \mathcal{L}_3 = 3$.

3° Soit $\mathcal{I}$ un sous-espace de $\mathcal{L}_3$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{I}, \quad \forall a \in \mathcal{L}_3 \quad [a, x] \in \mathcal{I}$$

a) Montrer que si $\mathcal{I}$ contient un élément $x = \alpha e + \beta f + \gamma h$ avec $\gamma \neq 0$, alors $\mathcal{I} = \mathcal{L}_3$.

b) Prouver que si $\mathcal{I} \neq \{0\}$ alors $\mathcal{I} = \mathcal{L}_3$ (on pourra se ramener à la question précédente).

4° **a)** Soit y un vecteur propre de h ; prouver que si $e(y) \neq 0$, alors $e(y)$ est un vecteur propre de h.

b) En déduire qu'il existe un vecteur propre x de h tel que $e(x) = 0$.

Dans la suite de cette partie, on note x un tel vecteur, et on note α la valeur propre de h associée.

5° **a)** Calculer $h(f^k(x))$ où k est un entier naturel.

b) En déduire qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^m(x) \neq 0$ et $f^{m+1}(x) = 0$.

c) Prouver que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $e(f^k(x))$ est colinéaire à $f^{k-1}(x)$.

6° On suppose que E ne contient aucun sous-espace stable par $\mathcal{L}_3$ autre que $\{0\}$ et E. On pose

$$F = \operatorname{Vect}\langle x, f(x), \ldots, f^m(x)\rangle.$$

a) Justifier que F est stable par e, f et h. Que peut-on en déduire ?

b) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (x, f(x), \ldots, f^m(x))$ est une base de E.

c) Déterminer la matrice de h dans la base $\mathcal{B}$.

d) En examinant tr h, prouver que $\alpha = -m$

7° Déterminer la matrice de e dans la base $\mathcal{B}$.

II–PRÉLIMINAIRE À L'ÉTUDE DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Dans cette partie E désigne toujours un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

1° Prouver qu'un endomorphisme a de E possède une seule valeur propre si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $a - \lambda Id$ soit nilpotent.

2° Soit u et v deux endomorphismes nilpotents commutant entre eux. Prouver que $u - v$ est nilpotent.

3° Soit u un endomorphisme de E ; on pose $\mathcal{N}_u = \bigcup_{p=0}^{\infty} \operatorname{Ker} u^p$ et $\mathcal{G}_u = \bigcap_{p=0}^{\infty} \operatorname{Im} u^p$.

a) Prouver qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{N}_u = \operatorname{Ker} u^{p_0}$ et $\mathcal{G}_u = \operatorname{Im} u^{p_0}$.

b) Prouver que $\mathcal{N}_u$ et $\mathcal{G}_u$ sont deux sous-espaces supplémentaires, stables par u, tels que u restreint à $\mathcal{N}_u$ soit nilpotent et que u restreint à $\mathcal{G}_u$ soit bijectif.

c) Prouver réciproquement que si $E = F \oplus G$ où F et G sont deux sous-espaces stables par u tels que la restriction de u à F soit nilpotente et la restriction de u à G bijective, alors $F = \mathcal{N}_u$ et $G = \mathcal{G}_u$.

On vient donc de prouver l'existence et l'unicité de tels sous-espaces F et G.

III–ÉTUDE DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Dans cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et l'on note θ_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\theta_A(B) = AB - BA.$$

1° **a)** Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme ϕ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\phi_A(M) = AM$ sont les valeurs propres de A.

b) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme ψ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\psi_A(M) = MA$.

Étant donnée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on considère λ et μ deux valeurs propres de A de multiplicité respective α et β. On pose

$$\mathcal{L}_{\lambda,\mu} = \operatorname{Vect}\langle U{}^tV, \quad U \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)^\alpha ; V \in \operatorname{Ker}({}^tA - \mu I_n)^\beta \rangle.$$

2° **a)** Prouver que le sous-espace $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est stable par θ_A.

b) Prouver que la restriction de θ_A à $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ admet pour unique valeur propre $\lambda - \mu$ (on remarquera que $\theta_A = \phi_A - \psi_A$).

3° **a)** Soit $\mathcal{F} = (U_1, \ldots, U_p)$ et $\mathcal{G} = (V_1, \ldots, V_q)$ deux familles de vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Prouver que si les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont libres, la famille $\{U_i{}^tV_j, \quad i \in [\![1,p]\!],\ j \in [\![1,q]\!]\}$, qu'on notera $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, est libre.

b) Soit λ et μ deux valeurs propres de A. On note $\mathcal{B}_\lambda$ une base de $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)^\alpha$ et $\mathcal{B}_\mu^*$ une base de $\operatorname{Ker}({}^tA - \mu I_n)^\beta$. Prouver que la famille $\mathcal{B}_\lambda \otimes \mathcal{B}_\mu^*$ est une base de $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$.

c) En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \bigoplus_{(\operatorname{Spec} A)^2} \mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ où $\operatorname{Spec} A$ désigne l'ensemble des valeurs propres de A.

4° Déterminer $\mathcal{N}_{\theta_A}$ (on utilisera la question II-3°**c)**

5° **a)** Soit $p_1, \ldots, p_n$ des entiers positifs ou nuls tels que $\sum_{k=1}^{n} p_k = n$. Prouver que $\sum_{k=1}^{n} {p_k}^2$ est minimal lorsque $\forall k \in [\![1,n]\!],\ p_k = 1$.

b) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que $\dim \mathcal{N}_{\theta_A}$ soit minimale.